IV.1.Introduction :

La connexité des qui caractérise les tronçons d'un réseau maillé rendre le calcul de distribution des débits, les pertes de charge au niveau des tronçons de réseau avec suffisamment de précision et de vitesse un problème sévère car le calcul n'est pas simple surtout s'il faite manuellement.

La complexité se réside où :

- La satisfaction de principe d'énergie minimale (l'eau toujours favorise le chemin le plus économique énergétiquement c.-à-d. qui engendre une perte de charge minimale) qui est conditionné par les éléments matériels installés et les débits passants à travers les tronçons, ce qui à pour conséquence que la moindre modification de réseau entraine une redistribution des débits donc un changement des pertes de charge et même les sens des écoulements, de ce fait la résolution de réseau dépond simultanément de ce qui se passe dans chaque tronçon de réseau.
- Aussi la relation qui lie les débits de tronçons avec les pertes de charge de ces derniers cette relation est comme elle est connus n'est pas linéaire, ce qui complexe le calcul.

L'équilibrage des réseaux maillés de distribution d'eau potable, présente une tache Pius ou moins difficile, et cela selon la complexité du réseau. On dispose des plusieurs méthodes d'équilibrage, parmi ces méthodes on cite la plus ancienne d'entre elles, qui sont méthode de HARDY CROSS (1936). Cependant il existe aussi des méthodes dites matricielles ; le présent chapitre décrit d'une manière plus ou moins détaillée ces deux -e: iodes ; l'objectif étant bien sûr de faire une comparaison entre elles.[5]

IV.2.Principes de base du calcul de systèmes hydrauliques complexes :

Des exemples précédents, on constate que :

• le débit entrant dans un réservoir est le même que celui qui en sort ainsi que celui qui coule dans la conduite qui relie les deux réservoirs;

• l'équilibre de l'écoulement, c'est-à-dire le régime permanent, est atteint lorsque la perte de charge devient égale à la charge hydraulique disponible.

La première constatation découle du principe de conservation de la masse pour un fluide incompressible, ce que nous appellerons un principe de continuité des débits.

La seconde constatation provient du principe général de conservation de l'énergie qui stipule que l'énergie perdue ou consommée doit être égale à l'énergie disponible [3].

IV.3.Formulation générale :

Voici les définitions et les règles à appliquer à l'analyse d'un circuit hydraulique :

1) Dans un circuit hydraulique, les points de jonctions sont appelés NOEUDS.

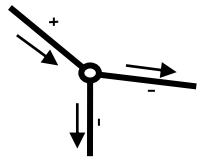
2) On définit comme MAILLES, les circuits fermés du système, y compris ceux formés par les liens entre les réservoirs

3) On écrit pour chaque nœud la continuité.des débits en tenant compte du signe des débits aux nœuds :

$$\sum_{N=i,j,k\ldots} \varepsilon_N \, Q_N = 0$$

N est le numéro des débits connectés à un nœuds et ε représente le signe du débit et vaut –1 ou 1.

La convention de signe peut être :



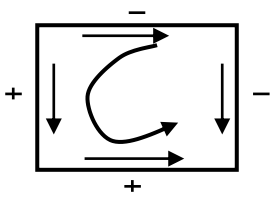
et doit être conservée pour tous les nœuds

6) Pour chaque maille, on exprime la conservation de l'énergie en faisant la somme algébrique (positif dans le sens du débit et négatif en sens inverse) tel que :

$$\sum_{M=i,j,k\ldots} \varepsilon_M \, \Delta H_M = 0$$

M est le numéro des débits le long du parcours de la maille et ε représente le signe du débit et vaut –1 ou 1.

La convention de signe peut être :



et doit être conservée pour tous les noeuds.

7) Dans les équations de mailles, on remplace les pertes de charge par une fonction du débit, pour les conduites, on écrit :

$$\Delta H_i = R_i \, Q_i^2$$

8) On vérifie que l'on a autant d'inconnues que d'équations. Si on a trop d'équations, en général, c'est qu'il y a une équation de continuité redondante. [15]

IV.4.Principes de base :

IV.4.1.Définitions préliminaires :

Un endroit où sont branchés ensemble plusieurs conduites, pompes, réservoirs ou autres équipements s'appelle un noeud

Un circuit fermé composé d'éléments constitutifs d'un réseau est appelé maille [3].

a)Loi des nœuds :

$$\sum_{N=i,j,k\ldots} \varepsilon_N \, Q_N = 0$$

Cette relation exprime le principe de conservation de la masse.

b) Loi des mailles :

$$\sum_{M=i,j,k\ldots} \varepsilon_M \, \Delta h_M = 0$$

Cette relation exprime le principe de conservation de l'énergie.

Les variables εN et εM représentent respectivement le signe des débits (ε N des conduites i,j,k,...etc. qui sont connectées à un nœud et le signe des pertes de charge hM des conduites i,j,k,... etc. qui sont constituent une maille selon la convention adoptée. Elles ne peuvent donc ne prendre que les valeurs -1 ou 1. [3]

Le débit est relié à la perte de charge par une relation de type :

$$h = R\, Q^n$$

on inversement :

$$Q = \left(\frac{1}{R^{1/n}}\right) h^{1/m} = R h^m$$

Où R est la résistance hydraulique dépendant de la loi d'écoulement choisie.

IV.5.Méthodes de calcul :

Le schéma général de la méthode de résolution de ce type de problème consiste a écrire au moyen de la loi des nœuds ou de la loi des mailles un nombre d'équivalent au nombre d'inconnus choisis. On peut choisir de déterminer soit les débits Q dans les conduites, soit les pertes de charge h dans les conduites, soient les charges H aux nœuds.

Dès que l'un de ces ensembles d'inconnues est déterminé, on peut facilement en déduire

Les eux autres grâces aux relations qui lient le débit à la perte de charge. Le caractère non linéaire de ces relations est responsable du non linéarité du système à résoudre.

Pour résoudre un système d'équations non linéaires, il faut le linéaires, ce qui conduit à une solution approximative. On procède alors par itérations pour améliorer la solution afin qu'elle se stabilise avec un certain degré de précision [3].

Plusieurs approches sont possibles et on peut les regrouper en trois grandes catégories:

- ☞ Méthodes de corrections successives.
- ☞ Méthodes de corrections simultanées.
- ☞ Méthodes directes.

IV.5.1.Méthode de Hardy Cross par maille :

Cette méthode de calcul par approximation successive a été proposée en 1936 par le professeur Hardy cross de l'université de l'Illinois (USA) .elle est dérivée de celle mise au point par le même auteur pour les calculs de système réticulés hyperstatique qui, en mécanique des matériaux, posent des indéterminations du même ordre que celle des réseaux maillé en hydraulique. La méthode s'applique au calcul des réseaux maillés quelle que soit leur complexité.

IV.5.2.Développement de la méthode :

Cette méthode consiste a choisir les débits Q comme inconnues on commence en choisissant un ensemble de débits initiaux Q_0 >0,qui satisfont la loi des nœuds, puis on les corrige de façon à ce que les pertes de charge générées par ces débits tendent à satisfaire la loi de mailles et sans perturber la loi des nœuds ,en générale ,cet objectif n'est pas atteint du Ier coup et la procédure est ainsi répétée en prenant comme débits initiaux les valeurs que l'on vise de retrouver[3].

Choix des Q_0 en respectant $\sum_{n=1} \varepsilon_n \ Q_n = 0$ à chaque noeud. Pour chaque maille, correction des débits pour atteindre $\sum_{n=1\ldots j} \varepsilon_m \ \Delta h_m = 0$ Loi des mailles.

Convention de signe. am est positif lorsque ie débit est dans le sens du parcours de la maille.

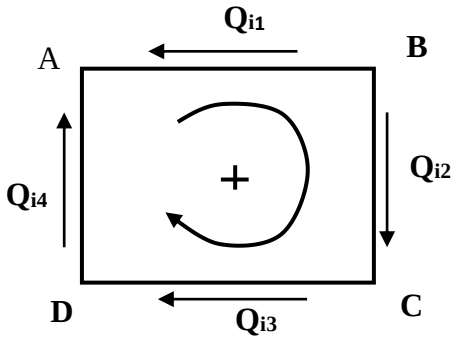


Figure IV.1 - Exemple d'une répartition des débits dans une maille

IV.6.Correction du débit dans une maille après une itération :

Soit une maille pour 1a. Quelle on a estimé les débits initiaux Q_0 dans chaque des tronçons, si Q_0 est le débit initial estimé dans un des tronçons et si ΔQ est la valeur de la correction à apporter à ce débit, le débit corrigé après la 1er itération est :

$$Q = Q_0 + \Delta Q$$

Ce débit Q est soit le nouveau débit relatif à l'itération suivant, soit le débit Q final .quand à ΔQ, c'est la correction positive ou négative, apporté aux débits relatifs à chacun tronçon de la boucle.

A l'itération suivante, la perte de charge dans un tronçon de conduite est :

$\Delta H = R(Q_0 + \mathbf{\Delta}Q)^m$

Soit :

$$\Delta H = RQ_0^m \left[1 + \frac{\Delta Q}{Q_0}\right]^m$$

Ici AH et R son propre au tronçon étudier .afin de permettre l'implémentation numérique, nous n'utiliserons pas les indices 0 pour ces deux variables dans la démonstration qui suit : Après qu'on ait développé le binôme, l'expression devient :

$$\Delta H = RQ_1^m \left[1 + m\frac{\Delta Q}{Q_1} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ x } \frac{\Delta Q^2}{Q_1^2} + \text{ termenégable}\right]$$

Si ΔQ est faible, comme ce doit être le cas après plusieurs itération, l'équation précédente devient :

$$\Delta H = RQ_1^m \left[1 + m\frac{\Delta Q}{Q_1}\right]$$

SI on effectue en suite la somme algébrique des pertes de tous les tronçons d'une maille, on obtient, en reconnaissant que la valeur absolue de ΔQ représente la correction à apporter au débit de tous les tronçons de la maille :

SI on effectue en suite la somme algébrique des pertes de tous les tronçons d'une maille, on obtient, en reconnaissant que la valeur absolue de ΔQ représente la correction à apporter au débit de tous les tronçons de la maille :

$$\sum \Delta H = 0 = \sum RQ_i^m = m\Delta Q \sum RQ_i^{m-1}$$

On pose Σ ΔH=0 , satisfaisant ainsi la limite à la quelle doit tendre le système, comme nous l'avons précédemment énuméré.

A partir de la relation ci -dessus, on obtient la valeur algébrique de 1a correction ΔQ relative à une maille, soit :

$$\Delta Q = \frac{-\sum RQ_i^m}{m\sum\frac{RQ_i^m}{Q_i}} = \frac{-\sum(\Delta H)_i}{m\sum\frac{(\Delta H)_i}{Q_i}}$$

Pour Hazen -wiliaims m=1,852.

Correction du débit dans une conduite appartenant a deux mailles: Conduite Adjacente (Commun).

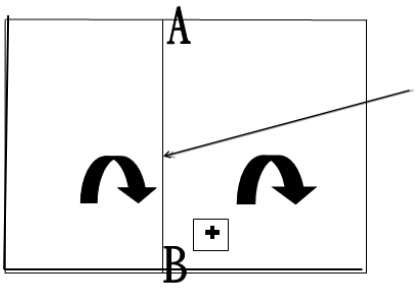


Figure IV.2 : Correction du débit dans une conduite appartenant a deux mailles

Puisque le tronçon AB fait partie des deux mailles, la correction se fait en fonction du débit de correction des deux mailles.

Si la correction se fait pour les débits des tronçons de ia î maille, alors la correction du débit de ce tronçon se fait comme suit :

$Q_{ab} = Q_{1ab} + (\Delta Q_1 - \Delta Q_2)$

Si la correction se fait pour les débits des tronçons de la 2émemaille, alors la correction du débit du tronçon AB est la suivante :

$Q_{ab} = Q_{1ab} + (\Delta Q_2 - \Delta Q_1)$

IV.6.1.Les étapes à suivre lorsque 'on utilise la méthode de Hardy Cross :

a) Identification des mailles et des nœuds.

b) Compte tenu des saignées (consommations) à chaque nœud et des estimations des débits initiaux est Q_0, dans chaque conduite, vérification qu'à chaque nœud, la somme algébrique des débits nulle.

c) Calcule des pertes de charge, ΔH relative à chaque conduite.

d) Calcule de la somme algébrique de pertes de charge relatives aux conduites d'une première maille, cette somme n'est pas nulle, puisque normalement l'évaluation

initial n'est pas exact ; par conséquent : $(\Delta H)i \neq 0$.

e) Calcule de la valeur de $\frac{\sum(\Delta H)_i}{\sum Q_i}$ pour la première maille ; ne pas tenir compte des signes algébriques, puisque, pour le même tronçon ΔH et Q sont du même signe.

g) Calcule des corrections ΔQ à apporter aux débits relatifs aux conduites de la première maille à l'aide de la relation.

h) Les étapes b, c, d, e et f sont répétée pour l'ensemble des mailles.

i) On passe à la correction des débits relatifs à chaque conduite, pour les tronçons appartenant a une seule maille la correction se fait par la relation, et pour les tronçons appartenant à deux mailles la correction se fait selon les formules .

j) Reprise des étapes c), d) jusqu'à l'obtention de la précision souhaitée : en générale, les opérations prennent fin lorsque les valeurs de ΔQ sont inférieur à une valeur prédéterminée

k) A partir des pressions connues aux nœuds dont on connaît l'élévation (pression nécessaire au consommateur), on peut calculer les pressions à tous les nœuds grâce à l'équation de Bernoulli et progressant à tous à l'autre ; par exemple, si on les calcule relativement aux noeuds A et B situés aux extrémités d'une même conduite, on obtient:

$$\left(H_a + \frac{P_a}{\varpi} + \frac{V_a^2}{2g}\right) - \left(H_b + \frac{P_b}{\varpi} + \frac{V_b^2}{2g}\right) = \Delta H_{ab}$$

Si P_a et H_a sont des valeurs connues au noeud A, que H_a est la hauteur du noeud B reliée au noeud A par le tronçon de conduite A-B et que le diamètre de la conduit ne varie pas entre le noeud A et B, alors $V_a=V_b$ l'équation ci-dessus devient : $\frac{P_a}{\rho g} + H_a = \frac{P_b}{\rho g} + H_b + \Delta H$

En fin puisqu'on peut calculer les pertes de charge (étant donnée qu'on connaît le débit et les Caractéristiques de la conduite entre les noeuds A et B),on peut calculer la pression $\frac{P_a}{\rho g}$ au nœud B.

IV.6.2.Vérification du nombre d'équations :

Pour un réseau maillé uniquement composé de conduites, il existe une relation, issue de la théorie des graphes, qui permet de déterminer rigoureusement le nombre d'équations nécessaires et suffisant pour résoudre le système. Cette relation s'écrit :

C=M+N-1

où :

C = nombre de conduites (ou d'éléments hydrauliques entre deux noeuds)

M = nombre de mailles (boucles fermées)

N = nombre de noeuds (points de jonctions)

Dans la théorie des graphes, C est appelé « nombre cyclomatique » et sa définition n'est valide que pour un graphe plan.

On peut donc écrire, un système de N - 1 équations de noeuds et M équations de mailles pour calculer les C débits des conduites[3].

IV.6.3.Antennes et réseaux ramifiés :

Une antenne est une branche d'un réseau dont un des noeuds n'est pas connecté. Le débit doit être connu à ce nœud. Si ce nœud est une sortie à l'air libre, ce ne peut pas être considéré comme l'extrémité d'une antenne mais plutôt une connexion à un réservoir dont la hauteur piézométrique est égal à l'élévation de la sortie. Ce réservoir doit être connecté à un autre par un lien piézométrique.

Un réseau ramifié est un réseau dont chaque nœud n'est connecté qu'à deux éléments et se terminant par des antennes. Il ne comporte pas de mailles et seules les équations de nœuds (continuité) sont utilisées pour le calculer.

IV.7.Méthode de résolutions :

Ici on présentera deux méthodes de résolutions couramment utilisées dans les logiciels de calcul hydraulique, soit les méthodes directes et la méthode matricielle par mailles.

IV.7.1.Méthodes directes :

IV.7.1.1.Méthode des débits :

Cette méthode est assez simple en ce qui concerne la mise en équations. En effet, il suffit d'écrire autant d'équations conservation de débit ou d'énergie qu'il y a de débits dans les éléments du réseau.

Dans un réseau maillé, on peut écrire la relation :

C = M + N - 1

On peut donc écrire, un système de N - 1 équations de nœuds et M équations de mailles pour calculer des C débits [17]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1} & \cdots & \varepsilon_{1,C} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{N-1,1} & \cdots & \varepsilon_{N,C} \\ \hline (\varepsilon R|Q|^{n-1})_{1,1} & \cdots & (\varepsilon R|Q|^{n-1})_{1,C} \\ \vdots & & \vdots \\ (\varepsilon R|Q|^{n-1})_{M,1} & \cdots & (\varepsilon R|Q|^{n-1})_{M,C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ \hline h_1 \\ \vdots \\ h_M \end{Bmatrix}$$

• Les N-1 premières lignes de la matrice contiennent les signes εi,j relatifs au i ième noeud et à la j ième conduite. Pour les conduites non connectées à un noeud, ε est nul.

• Les M dernières lignes de la matrice contiennent les termes signés $(\varepsilon R|Q|^{n-1})_{i,j}$ relatifs à la i ième maille et à la j ième conduite. Pour les conduites non participantes à une maille, ε est nul.

• Les débits de consommation imposés aux nœuds q_i sont placés dans la première partie du membre de droite.

• Les pertes et gains de charge constants h_i attribués à la présence de réservoirs ou de pompes sont placés dans la dernière partie du membre de droite.

• La seconde partie de la matrice contient des débits qui ne sont pas encore connus. On les remplace par des débits quelconques Q_0 qui sont sans rapport avec la loi des noeuds. On calcule alors une première estimation du débit Q avec ces débits Q_0 arbitraires puis on améliore la solution en procédant à des itérations.

• Pour améliorer la convergence, chaque Q_0 pour l'itération suivante se calcule comme la moyenne du débit Q calculé à l'itération précédente et du débit Q_0 précédent.

$$Q_0^{(i+1)} = \frac{Q^{(i)} + Q_0^{(i)}}{2}$$

Cette technique assure une convergence efficace mais relativement lente. Une autre technique de résolution a donc été proposée. Elle est basée sur l'application de la méthode de Newton-Raphson au système 5.18. Cette méthode a été programmé dans le logiciel CASH1. Les essais poursuivis jusqu'à maintenant ont prouvé, hors de tout doute, la supériorité de la stabilité de ce schéma numérique par rapport aux méthodes précédentes.

IV.7.1.2.Méthode des charges :

Cette méthode consiste à écrire un système d'équations composé des N équations de nœuds. Comme il y a C débits inconnus dans ces équations, on remplace les débits par la relation qui relie le débit à la perte de charge (éq. 5.8) dans laquelle on remplace explicitement la perte de charge par la différence de deux charges nodales. On obtient donc N inconnues. Il n'est plus possible, comme dans le cas précédent, de linéaires facilement le système et il est nécessaire d'utiliser la méthode de Newton-Raphson [3].

Pour chaque noeud i, il faut alors écrire une équation de ce type :

$$\left(\sum_{N=j.k\ldots} mK_{i,N}|H_i - H_N|^{m-1}\right)\Delta \mathrm{H_i} - \mathrm{mK_{i,j}}\left|H_i - H_j\right|^{m-1}\Delta \mathrm{H_j} - \mathrm{mK_{i,j}}|H_i - H_k|^{m-1}\Delta \mathrm{H_k} - \cdots$$

$$= -\left(\sum_{N=j.k\ldots} \varepsilon_N K_{i,N}|H_i - H_N|^m + \varepsilon_i q_i\right)$$

Cette méthode converge bien, la principale difficulté de sa mise en oeuvre surgit lors de l'introduction d'éléments hydrauliques comme des pompes.

IV.7.2.Méthode matricielle par mailles :

C'est une méthode itérative matricielle qui permet de repartir sur l'ensemble du réseau les corrections ΔQ pour obtenir l'équilibre des pertes de charge (loi des mailles) à partir de débits initiaux Q_0 choisis en fonction de la loi des nœuds.

• On écrit le système d'équations non linéaires à partir de la loi des mailles auquel on applique la méthode de Newton-Raphson (voir encadré théorique) pour chaque maille:

$$\sum_{N=i.j.k\ldots}\left(nR_M Q_{0,M}^{n-1}\,\Delta Q_M\right) = -\sum_{N=i.j.k\ldots}\varepsilon_M R_M Q_{0.M}^{n}$$

M est l'indice des conduites participant à une maille.

• On obtient donc autant d'équations qu'il y a de mailles et on a une inconnue par conduite. Généralement le nombre de conduites est plus grand que le nombre de mailles. Il est donc nécessaire, pour résoudre le problème, de réduire le nombre d'inconnue.

• Comme une conduite peut appartenir à au plus deux mailles, la réduction du nombre d'inconnues se fait en sachant qu'une conduite participant à deux mailles subit les corrections de chacune de ces mailles adjacentes :

$$\Delta Q_M = \Delta Q_A - Q_B$$

• Cela revient à faire un changement de variables dans lequel chaque correction de débit appliquée à une conduite M est remplacée par la différence de corrections appliquées aux mailles A et B communes à la conduite M . Si une conduite n'appartient qu'à une maille, on lui attribue seulement la correction de cette maille. Le nombre d'inconnues devient donc égal au nombre de mailles et la résolution est alors possible [3].

• Par exemple, pour une maille A adjacente aux mailles B et C, la relation (5.11) devient :

$$\left(\sum_{N=i.j.k\ldots} nR_M\ Q_{0.M}^{n-1}\right)\Delta Q_A - nR_{AB}\,Q_{0.AB}^{n-1} - nR_{AC}\,Q_{0.AC}^{n-1} = \sum_{N=i.j.k\ldots} \varepsilon_M\,R_M\,Q_{0.M}^{n}$$

• Où les indices AB et AC réfèrent aux conduites communes respectivement aux mailles A et B puis aux mailles A et C .

• En pratique, le système est organisé sous forme matricielle, en tenant compte que les sens des débits ne seront pas mis à jour et que le débit gardera son signe, de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \sum_{A} nR|Q_0|^{n-1} & -(nR|Q_0|^{n-1})_{A.B} & \cdots & -(nR|Q_0|^{n-1})_{A.M} \\ -(nR|Q_0|^{n-1})_{B.A} & \sum_{B} nR|Q_0|^{n-1} & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ -(nR|Q_0|^{n-1})_{M.A} & \cdots & \cdots & \sum_{M} nR|Q_0|^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta Q_A \\ \Delta Q_B \\ \vdots \\ \Delta Q_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{A} \varepsilon R|Q_0|^{n-1}Q_0 \\ \sum_{B} \varepsilon R|Q_0|^{n-1}Q_0 \\ \vdots \\ \sum_{M} \varepsilon R|Q_0|^{n-1}Q_0 \end{Bmatrix}$$

• On résout ce système pour obtenir le vecteur des corrections de débits.

• On applique les corrections ΔQ de chaque maille aux débits des conduites constituant la maille en tenant compte du signe :

$$Q_M = Q_{0.M} + \varepsilon_A\,\Delta Q + \varepsilon_A\,\Delta Q$$

• On remplace Q_0 par Q et l'on continue d'appliquer le processus de correction jusqu'à ce que la loi des mailles soit respectée avec une précision suffisante sur toutes les mailles.